

5. Kvadratické nerovnice

- mají tvar (mnoho je na něj lze přivést)

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$

- řešení: více způsobů

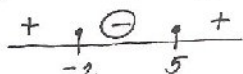
Příklady

① řešit v $\mathbb{R}$

a) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

(1. zp.) $(x-5)(x+2) \leq 0$

[mul. b. 5, -2]



vr. 6:
 $(6-5)(6+2) > 0 \oplus$

$\mathcal{K} = \langle -2, 5 \rangle$

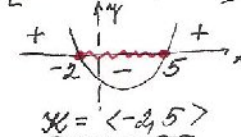
typ $D > 0$ (2 různé reálné nulové body)

součinový tvar
(už známý)

(2. zp.) s vyjád. grafu kv. funkce

$(x-5)(x+2) \leq 0$

[mul. b. 5, -2]



ovu v nemusíme
kreslit, zapíšeme
mno, kdy graf
pod (nad) osou x

- načtením graf kv. fce, kde průsečíky s osou x jsou nulové body
- ihned vidíme, pro která $x \in \mathbb{R}$ je graf fce nad osou x ($\oplus$) a pod osou x ($\ominus$)
- podle znaménka nerovnosti nerovnice napíšeme $\mathcal{K}$

b) $2x^2 - x - 6 > 0$

(1. zp.)

mul. b. kvadratické rovnice

$2x^2 - x - 6 = 0$

$(a=2, b=-1, c=-6)$

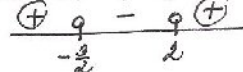
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1+48}}{4}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \langle \frac{1+7}{4} = 2, \frac{1-7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \rangle$

$2(x-2)(x-(-\frac{3}{2})) > 0$ } rovnice krátce
 $2(x-2)(x+\frac{3}{2}) > 0$ } zjednodušíme

mul. b. $2, -\frac{3}{2}$



vr. 3
 $2(3-2)(3+\frac{3}{2}) \oplus$

$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$

(2. zp.) $2x^2 - x - 6 > 0$

mul. b. $2x^2 - x - 6 = 0$

$(a=2, b=-1, c=-6)$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \langle \frac{1+7}{4} = 2, \frac{1-7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \rangle$



$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$

(3. zp.) TABULKA (nik dělný souč. tvar)

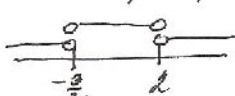
$2x^2 - x - 6 < 0$

mul. b. $2x^2 - x - 6 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$

$x_{1,2} = \langle \frac{1+7}{4} = 2, \frac{1-7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \rangle$

$\frac{1-7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$



$2(x-2)(x+\frac{3}{2}) < 0$

	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, 2)$	$(2, +\infty)$	
$(x-2)$	-	-	0	+
$(x+\frac{3}{2})$	-	0	+	+
$2(x-2)(x+\frac{3}{2})$	+	-	+	

vr. 3: $3-2$

vr. 3: $3+\frac{3}{2}$

$\mathcal{K} = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$

② Řešit v $\mathbb{R}$

Typ $D=0$ (dvojnásobný nulový bod)

a) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \geq 0$ i.l.

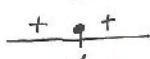
$x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$(x-1)^2 \geq 0$ nebo $(x-1)(x-1) \geq 0$

(1. zp.)

[mul. b. 1. dvojč.]

(2. zp.)



dvojnás. (nemění se zn.)

$\mathbb{X} = \mathbb{R}$



$\mathbb{X} = \mathbb{R}$

[nebo $(x-1)^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$]
 [nebo $(x-1)^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$]
 [nebo $(x-1)^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$]
 [nebo $(x-1)^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$]

b) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} > 0$

$x^2 - 2x + 1 > 0$

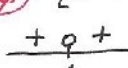
$(x-1)(x-1) > 0$

$(x-1)^2 > 0$

(1. zp.)

[mul. b. 1. dvojč.]

(2. zp.)



$\mathbb{X} = \mathbb{R} - \{1\}$



$\mathbb{X} = \mathbb{R} - \{1\}$

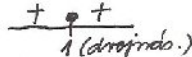
[nebo $(x-1)^2 > 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ kromě $x=1$]
 [nebo $(x-1)^2 > 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ kromě $x=1$]
 [nebo $(x-1)^2 > 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ kromě $x=1$]
 [nebo $(x-1)^2 > 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ kromě $x=1$]

c) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$(x-1)^2 \leq 0$

[mul. b. 1. dvojč.]

(1. zp.)



$\mathbb{X} = \{1\}$



$\mathbb{X} = \{1\}$

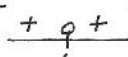
[$a^2 \geq 0$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$]
 [$(x-1)^2 \leq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$]
 [$(x-1)^2 \leq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$]
 [$(x-1)^2 \leq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$]

d) $x^2 - 2x + 1 < 0$

$(x-1)^2 < 0$

[mul. b. 1. dvojč.]

(1. zp.)



$\mathbb{X} = \emptyset$



$\mathbb{X} = \emptyset$

[$(x-1)^2 < 0$ není pro žádné $x \in \mathbb{R}$]
 [$(x-1)^2 < 0$ není pro žádné $x \in \mathbb{R}$]
 [$(x-1)^2 < 0$ není pro žádné $x \in \mathbb{R}$]
 [$(x-1)^2 < 0$ není pro žádné $x \in \mathbb{R}$]

③ Řešit v $\mathbb{R}$

Typ $D < 0$ (žádný nulový bod)

a) $x^2 + 4x \geq -5$ ANULOVAT!

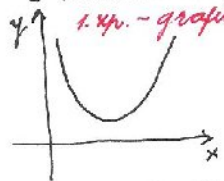
$x^2 + 4x + 5 \geq 0$

$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}, D < 0$

NEEX. NUL. BOD

milke v $\mathbb{R}$ nelze najít na křiv. číselu

1. zp. - graficky (pomocí souč. křiv. a nul. b. milke - nul. b. neexistují)



milke. průsečíky s osou x

=> graf kv. fce $y = x^2 + 4x + 5$ nad osou x

=> $y \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$

(2. zp.)

dovádím lib. $x \in \mathbb{R}$

$x=1 \Rightarrow 1^2 + 4 \cdot 1 + 5 \geq 0$

$10 \geq 0$

platí

=> $\mathbb{X} = \mathbb{R}$

[! POZOR - pokud u kv. fce $D < 0$ - dosaz.]

b) $-x^2 + 4x - 6 > 0$ i.(-1)

$x^2 - 4x + 6 < 0$

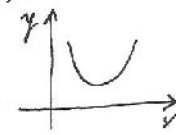
není v $\mathbb{R}$ milke.

$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 6}}{2}, D < 0$

milke v $\mathbb{R}$ nelze najít

NEEX. NUL. BOD

=> graf kv. fce $y = x^2 - 4x + 6$ neprochází osou x, je tedy nad osou x (pro $a=1 > 0$)



pro žádné $x \in \mathbb{R}$ není $y < 0$

=> $\mathbb{X} = \emptyset$

(2. zp.)

dos. lib. $x \in \mathbb{R}$

$x=1 \Rightarrow 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 < 0$

$3 < 0$ neplatí.

=> $\mathbb{X} = \emptyset$

④ Řešit v R

a) $x^2 + 4 > 0$
 ≥ 0
 pl. pro $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\mathcal{K} = \mathbb{R}$

$x^2 + 4 \geq 0$
 ≥ 0
 pl. pro $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\mathcal{K} = \mathbb{R}$

b) $x^2 + 4 < 0$
 ≥ 0
 > ml. žádní x ∈ R, pro které pl. není
 $\mathcal{K} = \emptyset$

$x^2 + 4 \leq 0$
 ≥ 0
 ml. žádní x ∈ R, pro které by ml. platila
 $\mathcal{K} = \emptyset$

c) $x^2 - 4 > 0$
 $(x-2)(x+2) > 0$ NEBO
 [mul. b. 2, -2]
 (+) 0 - 0 (+) kv. 3:
 -2 2 (3-2)(3+2)
 $\mathcal{K} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$(x-2)(x+2) > 0$
 [mul. b. 2, -2]
 (+) 0 - 0 (+)
 -2 2
 $\mathcal{K} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

d) $x^2 - 4 \leq 0$ NEBO
 $(x-2)(x+2) \leq 0$
 [mul. b. 2, -2]
 (+) 0 - 0 (+)
 -2 2
 $\mathcal{K} = [-2, 2]$

$(x-2)(x+2) \leq 0$
 [mul. b. 2, -2]
 (+) 0 - 0 (+)
 -2 2
 $\mathcal{K} = [-2, 2]$

⑤ Řešit v R

a) $x^2 + \frac{1}{2}x \leq 0$
 $x(x + \frac{1}{2}) \leq 0$
 [mul. b. 0, -1/2]
 (+) 0 - 0 (+) kv. 1
 -1/2 0 1(1+1/2) > 0
 $\mathcal{K} = [-\frac{1}{2}, 0]$

b) $-x^2 - 2\sqrt{3}x < 0$ i. (-1)
 $x^2 + 2\sqrt{3}x > 0$
 $x(x + 2\sqrt{3}) > 0$
 [mul. b. 0, -2√3]
 (+) 0 - 0 (+) kv. 1
 -2√3 0 1(1+2√3) > 0
 $\mathcal{K} = (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, +\infty)$

c) $\frac{1}{3}x^2 + 1 > 0$ i. 3
 $x^2 + 3 > 0$ NEBO
 ≥ 0 nikdy $x^2 > -3$ nikdy
 $\mathcal{K} = \mathbb{R}$

d) $x^2 < 1 - \sqrt{5}$! $1 - \sqrt{5} < 0$
 ≥ 0 < 0 $1 - 2,4 < 0$
 nemá řeš.
 $\mathcal{K} = \emptyset$

⑥ Řešit v R

a) $x^2 + 2x - 3 > 0$
 $(x+3)(x-1) > 0$
 [x₀ = -3, x₀ = 1]
 (+) 0 - 0 (+) kv. 2:
 -3 1 (2+3)(2-1) > 0
 $\mathcal{K} = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

b) $-x^2 + 5x + 14 \geq 0$ i. (-1)
 $x^2 - 5x - 14 \leq 0$
 $(x-7)(x+2) \leq 0$
 [mul. b. 7, -2]
 (+) 0 - 0 (+) kv. 8:
 -2 7 (8-7)(8+2) > 0
 $\mathcal{K} = [-2, 7]$

c) $y^2 - 3y - 2 < 0$ ANULOVAT
 $y^2 - 3y - 2 < 0$
 [a=1, b=-3, c=-2]
 $y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$
 (+) 0 - 0 (+) kv. 5:
 $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ [3+4, ...]
 PROBLÉM VPRÁČKY => $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$
 $\mathcal{K} = (\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$

d) $y^2 + \frac{5}{4} \geq y$ ANULOVAT $\mathbb{R} = \mathbb{R}$
 $y^2 - y + \frac{5}{4} \geq 0$ i. 4
 $4y^2 - 4y + 5 \geq 0$
 [a=4, b=-4, c=5]
 $y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{8}$, D < 0
 nemá mul. b.
 $\mathcal{K} = \mathbb{R}$

7) řešit v R

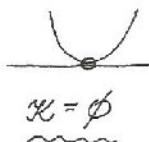
DU a) $(x-2)(x-6) < 4(x-6)$

$$x^2 - 6x - 2x + 12 < 4x - 24$$

$$x^2 - 12x + 36 < 0$$

$$(x-6)(x-6) < 0$$

$$(x-6)^2 < 0$$



b) $(1-s) \leq (s-1)(s+2)$

$$1-s \leq s^2 + 2s - s - 2$$

$$1-s \leq s^2 + s - 2$$

$$0 \leq s^2 + 2s - 3$$

$$s^2 + 2s - 3 \geq 0$$

$$(s+3)(s-1) \geq 0$$

$$[\text{mul. b. } -3, 1]$$



nebo

$$\frac{(2+3)(2-1) \geq 0}{(2+3)(2-1) \geq 0}$$

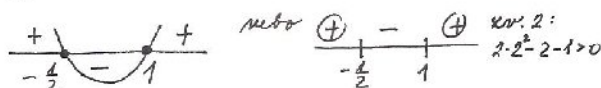
$$\mathcal{K} = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

8) určete definiční obory

DU a) $\sqrt{2x^2 - x - 1}$ $\left[\begin{array}{l} \text{V} \sqrt{a} \text{ je def.} \\ \text{pro } a \geq 0 \end{array} \right]$

$$D: 2x^2 - x - 1 \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} (a=2, b=-1, c=-1) \\ x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$



$$D = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$$

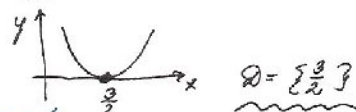
b) $\sqrt{12x - 9 - 4x^2}$

$$D: 12x - 9 - 4x^2 \geq 0 \text{ Uspořádat}$$

$$-4x^2 + 12x - 9 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$4x^2 - 12x + 9 \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} (a=4, b=-12, c=9) \\ x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} \\ x_{1/2} = \frac{3}{2} \quad 1 \text{ mul. b. dvojnásobek} \end{array} \right]$$



9) rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{R}$ jsou zlomky. NEKLADNÉ

DU a) $\frac{6k - k^2 - 8}{16}$

$$\frac{6k - k^2 - 8}{16} \leq 0 \quad \left(\frac{-}{+} = - \right)$$

$$\Leftrightarrow 6k - k^2 - 8 \leq 0$$

$$-k^2 + 6k - 8 \leq 0 \quad | \cdot (-1)$$

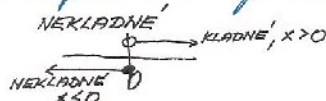
$$k^2 - 6k + 8 \geq 0$$

$$(k-2)(k-4) \geq 0$$

$$[\text{mul. b. } k_0 = 2, k_0 = 4]$$



$$k \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$



b) $\frac{2}{2k^2 + k - 1}$

$$\left(\frac{-}{+} = - \right) \frac{2}{2k^2 + k - 1} \leq 0 \Leftrightarrow 2k^2 + k - 1 < 0$$

(ne, jmenov., nulov =)

$$\left[\begin{array}{l} k_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2 \cdot 4}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \\ k_{1/2} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \\ k_{1/2} = \frac{-1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

